

۱- گزینه ۲ صحیح است.

برای محاسبه مساحت از انتگرال سطح نوع یک با انتگرالده ۱ استفاده می‌کنیم.

$$\iint_S ds \quad \text{مساحت رویه}$$

$$ds = \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2} dA = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA$$

$$D: 2 - (x^2 + y^2) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$\text{مساحت رویه:} \quad \iint_{D: x^2 + y^2 \leq 2} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} r dr \right) = (2\pi) \left(\frac{1}{\frac{4}{2}} \frac{(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13\pi}{3}$$

۲- گزینه ۲ درست است.

انتگرال سطح نوع دوم است که چون سطح بسته است از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} I &= \oiint_S F \cdot n ds = \iiint \text{Div}(F) dv = \iiint (3y^2 + 3z^2) dv = 3 \iint_{y^2 + z^2 \leq 1} \int_{-1}^1 y^2 + z^2 dx dA \\ &= 3 \times 3 \iint_{y^2 + z^2 \leq 1} y^2 + z^2 dA \end{aligned}$$

باتوجه به ظاهر شدن $y^2 + z^2$ از قطبی استفاده می‌کنیم.

$$I = 9 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 r dr d\theta = 9 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 r^3 dr \right) = \frac{9\pi}{2}$$

۳- گزینه ۴ صحیح است.

انتگرال سطح نوع دوم است. ناحیه باز است پس از قضیه دیورژانس نمیتوانیم استفاده کنیم. لذا از روش مستقیم کمک می گیریم.

$$\xrightarrow{n=?} n = \pm \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \pm \frac{(1, 1, \frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

$$\xrightarrow[\substack{ds=? \\ z=6-2x-2y}]{ds=?} ds = \sqrt{1 + (-2)^2 + (-2)^2} dA = 3 dA$$

$$\Rightarrow I = \iint_S F \cdot n \, ds = \iint_S (x, -x^2, x+z) \cdot (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) (3) \, dA$$

$$\xrightarrow{z=6-2x-2y} I = \iint_D (x - 2y - 2x^2 + 6) \, dA = \int_0^3 \int_0^{3-x} (x - 2y - 2x^2 + 6) \, dy \, dx$$

$$= \int_0^3 (xy - y^2 - 2x^2y + 6y) \Big|_0^{3-x} dx = \int_0^3 (2x^3 - 8x^2 + 3x + 9) \, dx = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{8x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x \right) \Big|_0^3 = 9$$

۴- گزینه ۱ صحیح است.

انتگرال سطح نوع دوم و سطح آن باز است ولی می توانیم با یک صفحه ساده ببندیم.

$$I = \iint_S F \cdot n \, ds = \oiint_{S+S'} F \cdot n \, ds - \iint_{S'} F \cdot n' \, ds$$

$$I_1 = \oiint_{S+S'} F \cdot n \, ds = \iiint_W \text{Div}(F) \, dv = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 2} x \, dv = 0$$

$$\xrightarrow[\substack{n'=-k \\ ds=dA}]{n'=-k} I_2 = \iint_{S'} F \cdot (-k) \, dA = \iint_{x^2+y^2 \leq 2} (?, ?, xz) \cdot (0, 0, -1) \, dA = 0$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = 0 - 0 = 0$$

۵- گزینه ۳ صحیح است.

شار نشان دهنده انتگرال سطح نوع دوم است. چون گفته شده ناحیه بین صفحه XY و رویه، پس سطح باز است. پس ابتدا سطح را می بندیم و محاسبات را انجام می دهیم.

$$\text{شار: } \iint_S F \cdot n \, ds = \oiint_{S+S'} F \cdot n \, ds - \iint_{S'} F \cdot n' \, ds$$

$$\begin{aligned} I_{\mathfrak{I}} &= \oint\!\!\!\oint_{S+S'} F.n\,\mathrm{d}s = \iiint_S \mathrm{Div}(F)\,\mathrm{d}\mathfrak{v} = \int_{\circ}^{\mathfrak{Y}\pi} \int_{\circ}^{\mathfrak{Y}} \int_{\circ}^{\mathfrak{F}-r^{\mathfrak{Y}}} (\mathfrak{r}+\mathfrak{Y}z)r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \left(\int_{\circ}^{\mathfrak{Y}\pi} \mathrm{d}\theta\right) \left(\int_{\circ}^{\mathfrak{Y}} (\mathfrak{Y}z+z^{\mathfrak{Y}})r\,\mathrm{d}r\right) \Bigg|_{\circ}^{\mathfrak{F}-r^{\mathfrak{Y}}} = \mathfrak{Y}\pi \int_{\circ}^{\mathfrak{Y}} (\mathfrak{Y}\lambda r-\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}r^{\mathfrak{Y}}+r^{\Delta}) = \mathfrak{Y}\pi(\mathfrak{Y}\mathfrak{F}r^{\mathfrak{Y}}-\frac{\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}}{\mathfrak{F}}r^{\mathfrak{F}}+\frac{r^{\mathfrak{E}}}{\mathfrak{E}}) \Bigg|_{\circ}^{\mathfrak{Y}} = \frac{\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}\mathfrak{E}\pi}{\mathfrak{Y}} \end{aligned}$$

$$I_{\mathfrak{Y}}=\iint_{S'}F.n'\,\mathrm{d}s=\iint_{S'}(\begin{smallmatrix}?,?,&z^{\mathfrak{Y}}\\&&z=\circ\end{smallmatrix})(\circ,\circ,-\mathfrak{Y})\,\mathrm{d}A=\circ.$$

$$I=I_{\mathfrak{I}}-I_{\mathfrak{Y}}=\frac{\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}\mathfrak{E}\pi}{\mathfrak{Y}}$$